Institut de Recherche Dupuy de Lôme

Contribution au dimensionnement au flambement des équipements sous pression par des méthodes simplifiées

DOCTORANTE Gwladys BELONE
DIRECTEUR DE THÈSE Philippe LE GROGNEC
CO-ENCADRANTS Philippe ROHART, Samir ASSAF

CNRS UMR 6027

Contexte

ESP

Enceintes étanches, contenant gaz ou liquide comprimé, pression > ou < pression atmosphérique.

Formes géométriques usuelles : sphères, cylindres ou cônes.

Nombreuses industries (pétrole/gaz, chimie, énergie…).

Enjeux pour la sécurité

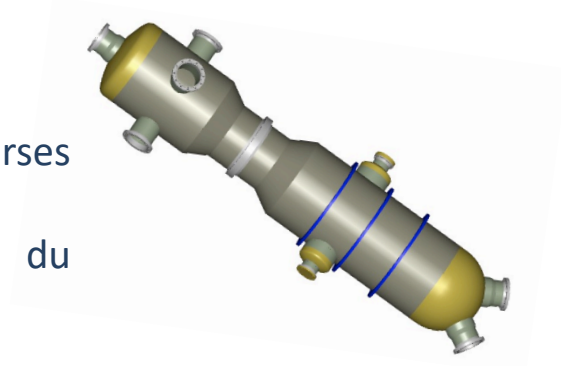
Energie très importante dans l'enceinte → défaillance (**FLAMBEMENT**, fissures…).

Facteurs à risques - Règlementations strictes (ASME, CODAP).

Flambement d'une structure : se produit lorsqu'un léger accroissement de chargement entraîne des déformations importantes, provoquant l'effondrement.

Objectifs du travail

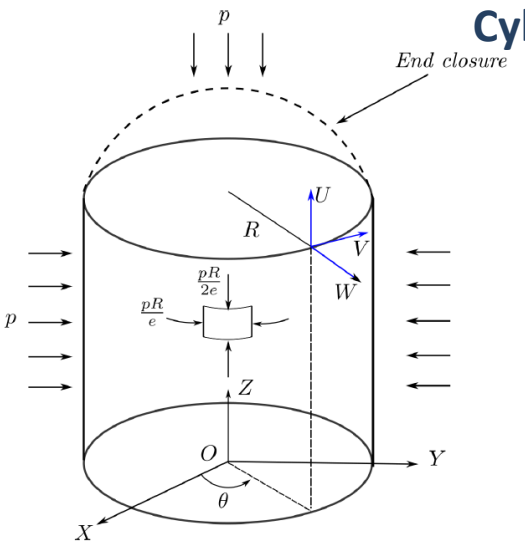
- Fournir des solutions analytiques simples pour l'analyse du flambement élastique-plastique de diverses géométries de coques sous pression externe, puis traiter les ESP dans leur ensemble.
- Développer un code de calcul EF simplifié pour l'analyse de la sensibilité aux imperfections du comportement post-critique.
- Contribuer au développement des règlementations en vigueur.

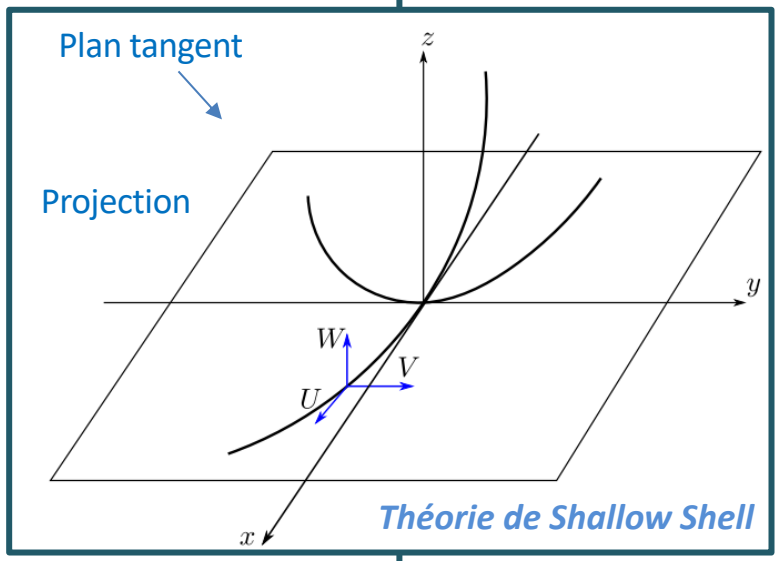


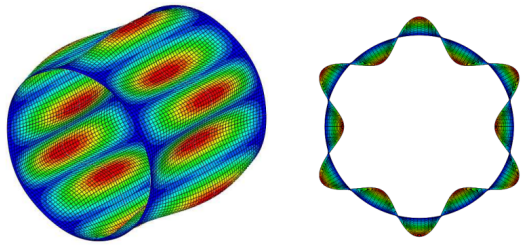
Cylindre/Sphère : Travaux antérieurs

Equation de bifurcation (PTV) : $\forall \delta\bar{u},\ \int_\Omega \bar{\bar{\nabla}}^T \delta\bar{u} : \boldsymbol{K} : \bar{\bar{\nabla}}\bar{X}\, d\Omega = 0$, avec $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C} - \Pi_x \bar{e_i} \otimes \bar{e_x} \otimes \bar{e_x} \otimes \bar{e_i} - \Pi_y \bar{e_i} \otimes \bar{e_y} \otimes \bar{e_y} \otimes \bar{e_i}$

Cylindre + effet de fond







Mode 1

Contrainte biaxiale :

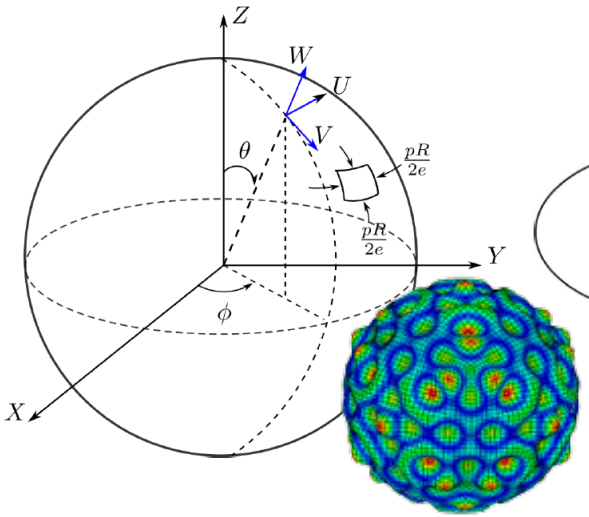
$$\begin{cases} \sigma_x = pR/2e \\ \sigma_y = 2\sigma_x \end{cases}$$

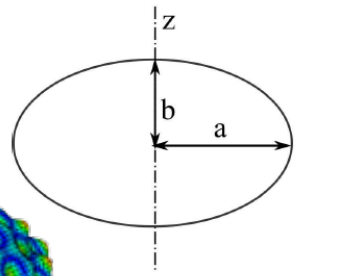
Modes de flambement :

$$\begin{cases} \mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \cos(\frac{ny}{R}) \cos(\frac{m\pi x}{L}) \\ \mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sin(\frac{ny}{R}) \sin(\frac{m\pi x}{L}) \\ \mathcal{W} = \mathcal{W}_0 \cos(\frac{ny}{R}) \sin(\frac{m\pi x}{L}) \end{cases}$$

n et m : nombres d'onde dans les directions *x* et *y*

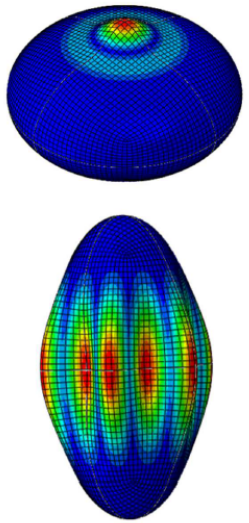
Sphère et Ellipses





(a) Oblate

(b) Prolate



Mode 1

Ellipse ~ Sphère de rayon de courbure : $R' = R_{yy} = R_{xx} = \dfrac{a^2}{b}$

Contrainte équi-biaxiale :

$$\begin{cases} \sigma_x = pR/2e \\ \sigma_y = \sigma_x \end{cases}$$

Contraintes équi-biaxiales aux pôles :

$$\begin{cases} \sigma_x = pR'/2e \\ \sigma_y = \sigma_x \end{cases}$$

Mode de flambement :

$$\begin{cases} \mathcal{U} = A \sin(\frac{k_x x}{R}) \cos(\frac{k_y y}{R}) \\ \mathcal{V} = B \cos(\frac{k_x x}{R}) \sin(\frac{k_y y}{R}) \\ \mathcal{W} = C \cos(\frac{k_x x}{R}) \sin(\frac{k_y y}{R}) \end{cases}$$

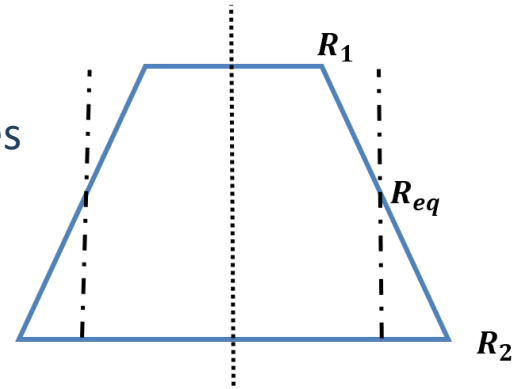
VAN DONG, 2022

k_x et k_y : nombres d'onde dans les directions *x* et *y*

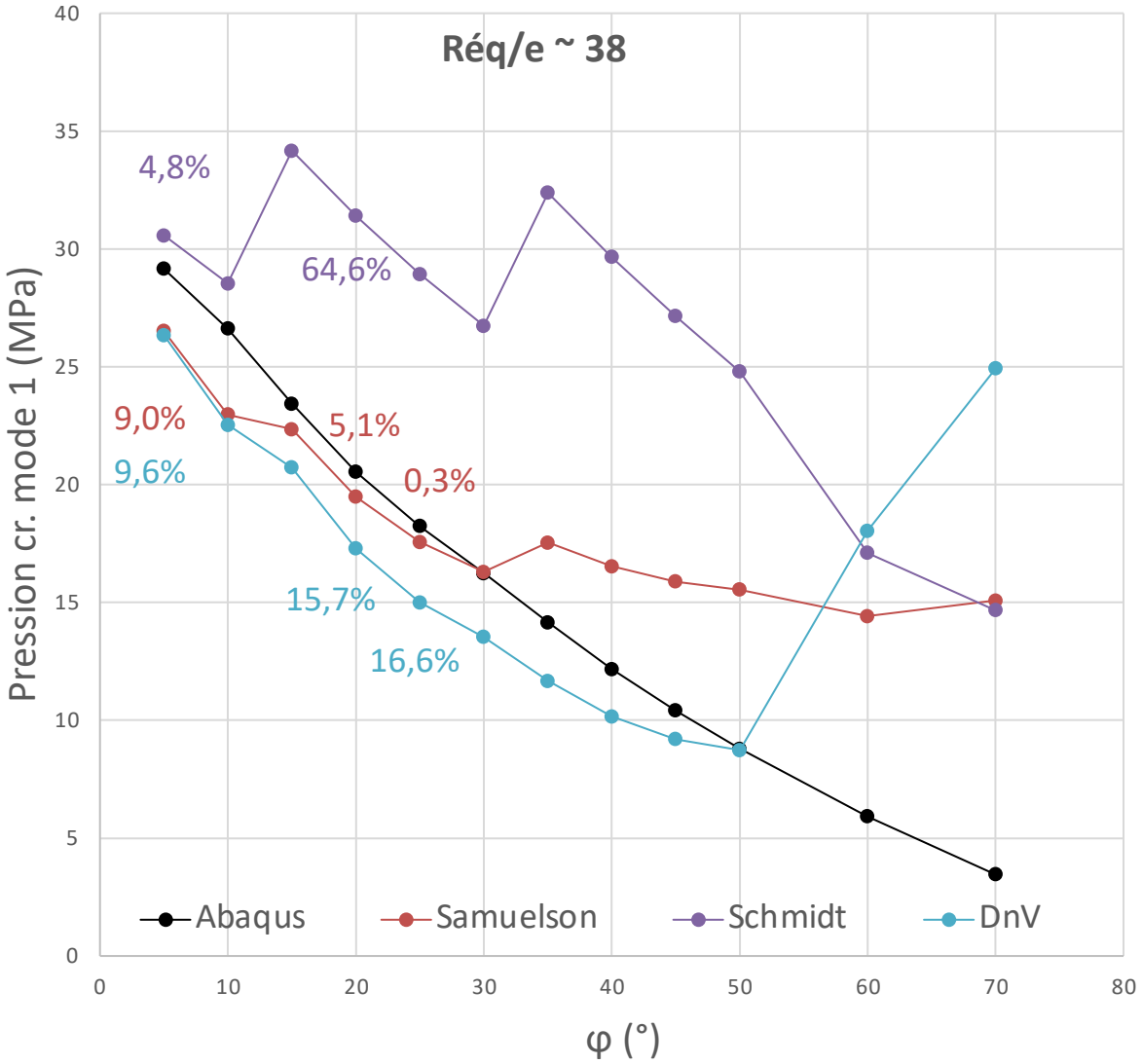
Cône : Travaux antérieurs

- **En élasticité**

Plusieurs études basées sur des cylindres équivalents.

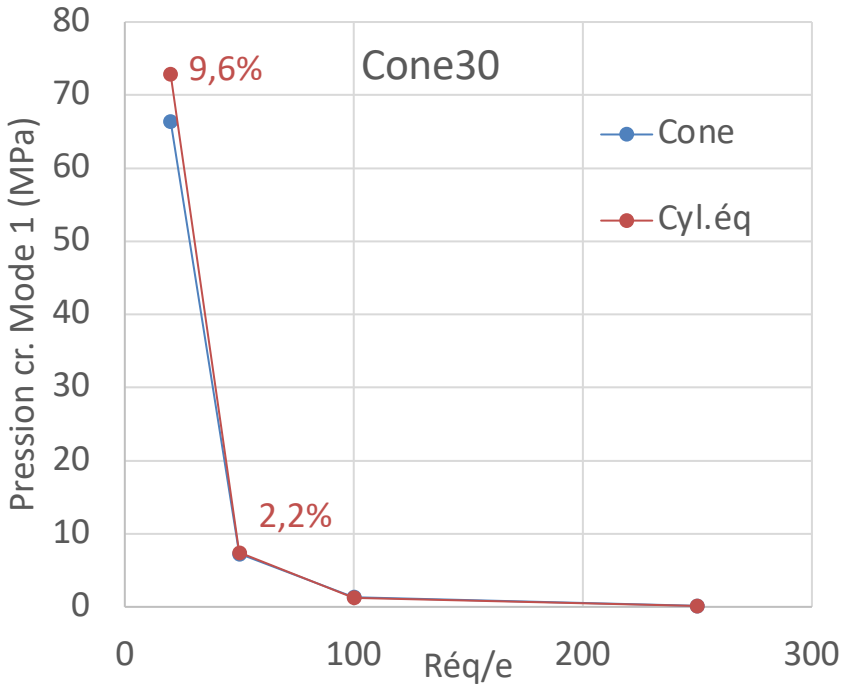


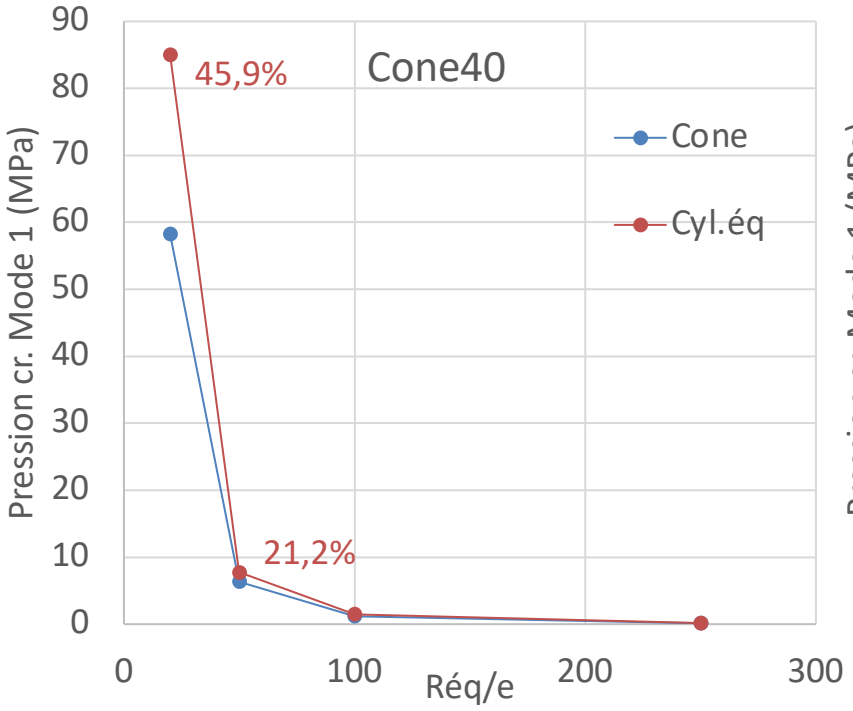
Auteurs	Rayons équivalents	Longueurs équivalentes
Schmidt et Krysik (1994)	$\dfrac{R_1 + 2\sqrt{R_1 e}\,\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$	L_{cone}
DnV (1992)	$\dfrac{R_1 + R_2}{2\cos(\varphi)}$	L_{cone}
Samuelson et Eggwertz (1992)	$\dfrac{R_1 + R_2}{2}$	L_{cone}
ECCS (2008)	$\dfrac{R_1}{\cos(\varphi)}$	L_{cone}

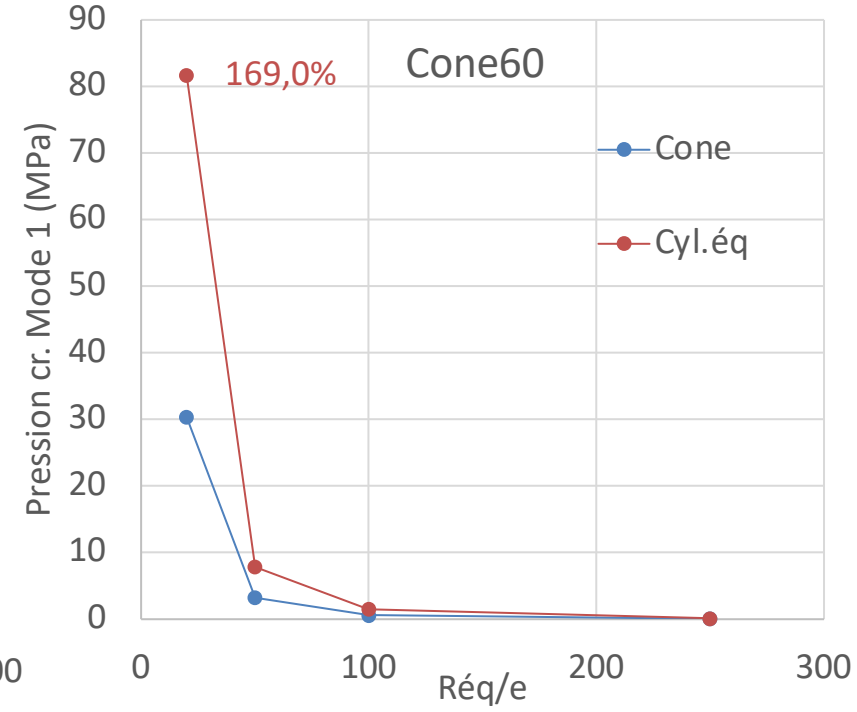


Cône : Travaux antérieurs

Samuelson et Eggwertz (1992) : $\frac{R1+R2}{2}$







✗ Formules « cylindres équivalents » : φ grand (> 30°) et cône moyens/épais (R/e <50).

- **Plasticité**

Pas de solution analytique en plasticité.

➡ Proposer des solutions analytiques plus précises en élasticité et plasticité.

Cône : Etat de contrainte biaxial

Cône bi-appuyé sous pression externe avec effet de fond

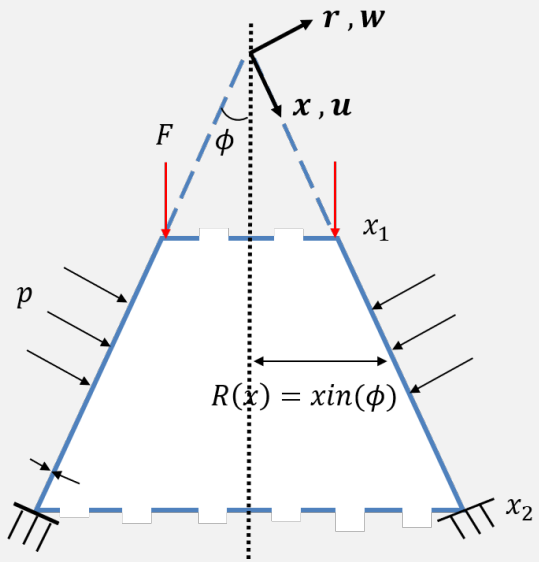
- **Equilibre membranaire :**

$$\begin{cases} \dfrac{dN_x}{dx} - \dfrac{\sin(\phi)}{r}(N_x - N_\theta) = 0 \\ \dfrac{\cos(\phi)}{r} N_\theta + p = 0 \end{cases}$$

CL : en $x = x_1$: $N_x(x_1) = -\dfrac{p\, r(x_1)}{2\ cos(\phi)}$

- **Contraintes :**

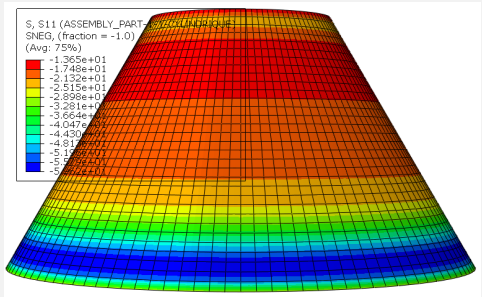
$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{N_x}{e} = -\dfrac{pR(x)}{2\, e \cos(\phi)} \\ \sigma_\theta = \dfrac{N_\theta}{e} = -\dfrac{pR(x)}{e \cos(\phi)} = 2\sigma_x \end{cases}$$



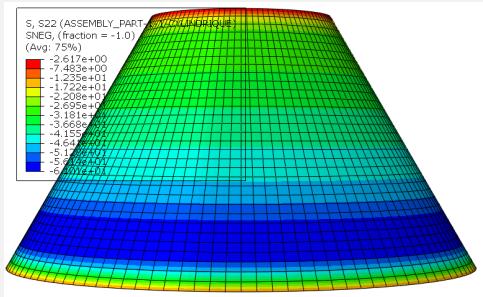
Singer, 1961

Cône30

- S11



- S22

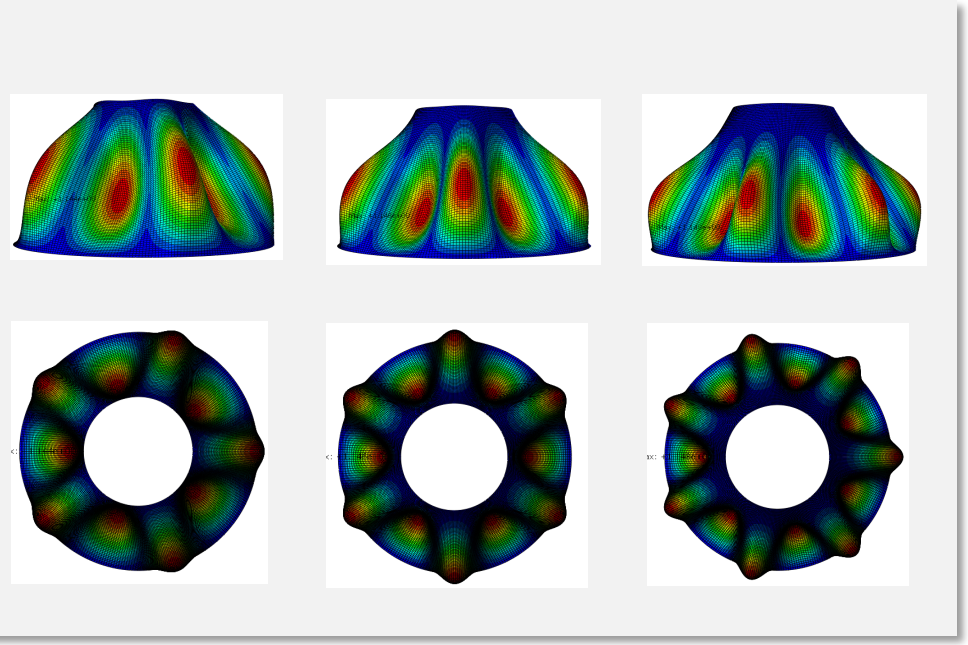


S, S11	S, S22
-19.2578	-38.6894

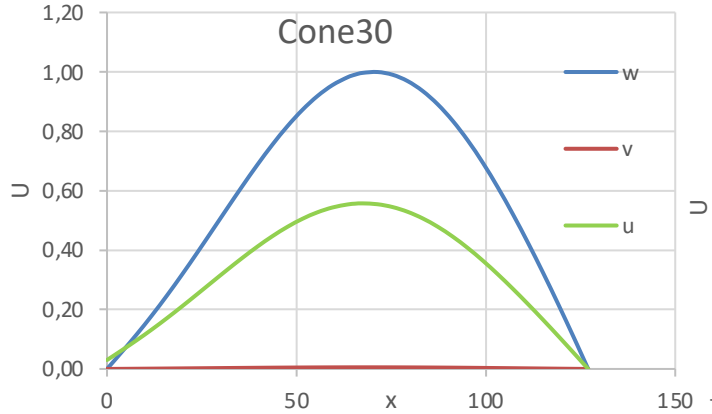
- Contraintes linéaires suivant une génératrice dans les directions $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_\theta})$
- Contraintes hétérogènes

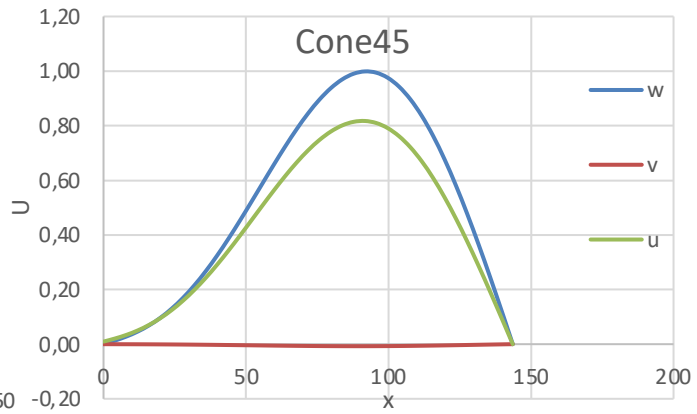
Cône : LBA

- Modes 1, 2, 3

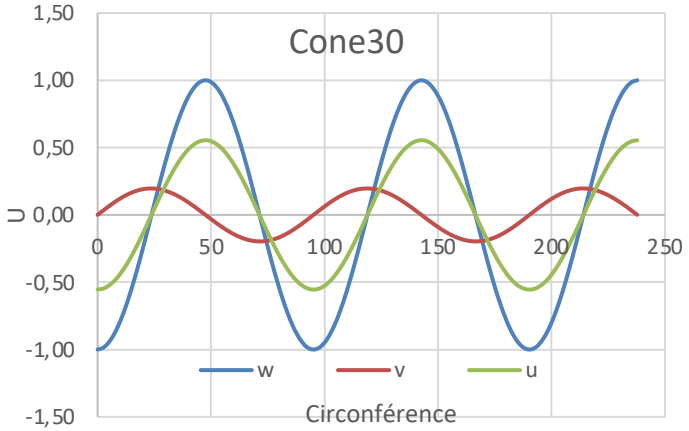


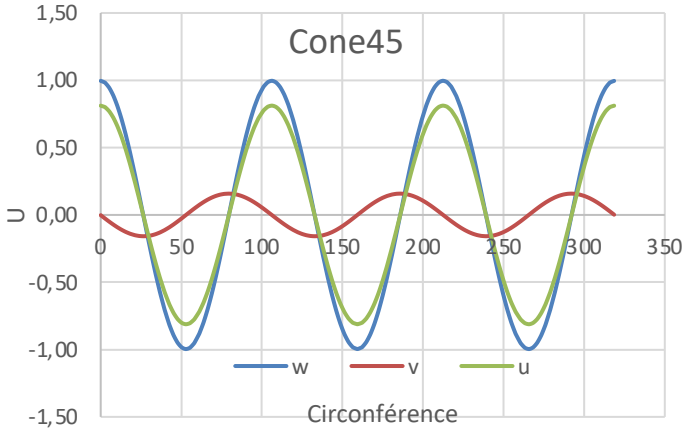
- θ fixé





- x fixé





Remarques

- Sinusoïdes avec sommets décalés
- Approximation avec des polynômes cubiques

Cône : Solution Analytique

Equation de bifurcation : $\forall \delta\bar{u},\ \int_\Omega \bar{\bar{\nabla}}^T \delta\bar{u} : \boldsymbol{K} : \bar{\bar{\nabla}}\bar{X}\, d\Omega = 0$

Les déplacements s'expriment dans le repère curviligne orthogonal du cône :
Nécessité de créer un **système conique associé**

- Relation entre les coordonnées cartésiennes (x1, x2, x3) et coniques (ρ, θ, z) :

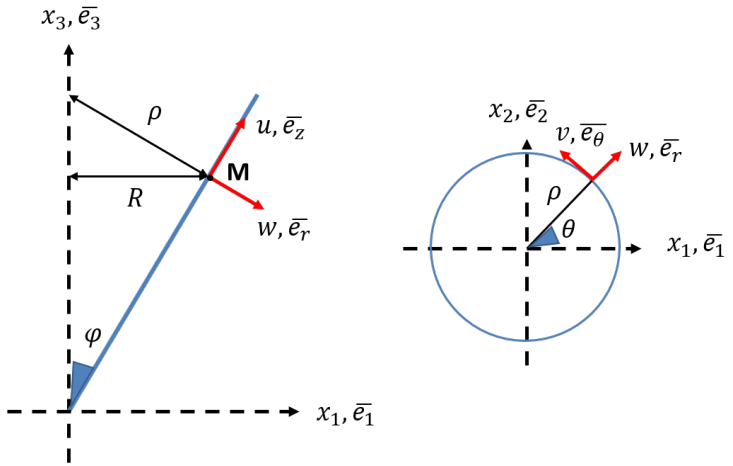
$$\bar{x} = \left| \begin{array}{l} x_1 = (z sin\varphi + \rho cos\varphi)\cos\theta \\ x_2 = (z sin\varphi + \rho cos\varphi)\sin\theta \\ \quad x_3 = z sin\varphi - \rho cos\varphi \end{array} \right.$$

- Gradient d'un tenseur $\bar{T}$ d'ordre 1 :

$$\bar{\bar{\nabla}}\bar{T} = \partial_{x_1}(T_r\bar{e_r} + T_\theta\bar{e_\theta} + T_z\bar{e_z}) \otimes \bar{e_1} + \partial_{x_2}(T_r\bar{e_r} + T_\theta\bar{e_\theta} + T_z\bar{e_z}) \otimes \bar{e_2} + \partial_{x_3}(T_r\bar{e_r} + T_\theta\bar{e_\theta} + T_z\bar{e_z}) \otimes \bar{e_3}$$

- Vecteurs unitaires dans chacune des bases :

$$\bar{e_1} = cos\varphi cos\theta\bar{e_r} - sin\theta\bar{e_\theta} + sin\varphi cos\theta\bar{e_z}$$
$$\bar{e_2} = \cdots$$
$$\bar{e_3} = \cdots$$
$$\bar{e_r} = \partial_\rho\bar{x} = cos\varphi cos\theta\bar{e_1} + cos\varphi cos\theta\bar{e_2} - sin\varphi\,\bar{e_3}$$
$$\bar{e_\theta} = \partial_\theta\bar{x} = \cdots$$
$$\bar{e_z} = \partial_z\bar{x} = \cdots$$



Gradient conique dans la base $(\bar{e_z}, \bar{e_\theta}, \bar{e_r})$

$$\bar{\bar{\nabla}}\bar{T}_{(\bar{e_z},\bar{e_\theta},\bar{e_r})} = \begin{bmatrix} T_{r,\rho} & \frac{1}{R}(T_{r,\theta} - T_\theta cos\varphi) & T_{r,z} \\ T_{\theta,\rho} & \frac{1}{R}(T_{\theta,\theta} + T_r cos\varphi + T_z sin\varphi) & T_{\theta,z} \\ T_{z,\rho} & \frac{1}{R}(T_{z,\theta} - T_\theta sin\varphi) & T_{z,z} \end{bmatrix}$$

Cône : Solution approchée – Rayleigh-Ritz

Cinématique du modèle coques minces de Love :

$$\bar{u}(x,\theta,z) = \begin{vmatrix} u(x,\theta) - z w_{,x}(x,\theta) \\ v(x,\theta) - \dfrac{z}{R(x)} w_{,\theta}(x,\theta) \\ w(x,\theta) \end{vmatrix} \text{, avec } R(x) = x\sin(\phi)$$

Sharghi, 2016

Solution analytique

Expression de l 'équation de bifurcation $\forall \delta\bar{u},\ \int_\Omega \bar{\bar{\nabla}}^T \delta\bar{u} : \boldsymbol{K} : \bar{\bar{\nabla}}\bar{X}\, d\Omega = 0$:

- IPP longues et fastidieuses.
- Intégration analytique/numérique de la fonction sinus intégral $Si(x)$ impossible avec des fonctions usuelles. Peut s'estimer avec des suites, le théorème des résidus, la transformée de Laplace.

Solution approchée

Méthode de Rayleigh-Ritz : Procédure pour obtenir une solution approchée aux problèmes variationnels :

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, u, u', \dots) dx = 0 \ ,$$

où $u(x)$ est la solution stationnaire à déterminer.

La solution $u(x)$ est approché par $\bar{u}(x)$, fonction test composée d'une combinaison linéaire de n fonctions de forme pré-sélectionnées $\phi_i(x)$:

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \phi_i(x) \ ,$$

où c_i sont des constantes à déterminer.

Le nouveau problème variationnel devient :

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \bar{F}(x, c_1, c_2, \dots) dx = 0$$

Cône : Solution approchée – Rayleigh-Ritz

1

Choix des fonctions de forme f, g, h

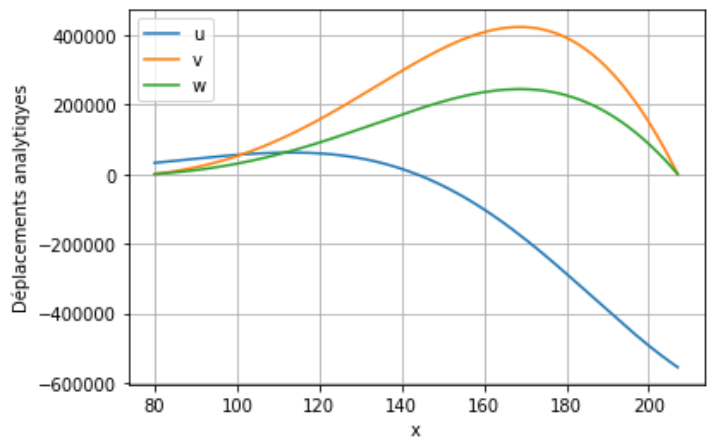
$$u(x,\theta) = u_0\, f(x,\theta)$$
$$v(x,\theta) = v_0\, g(x,\theta)$$
$$w(x,\theta) = w_0\, h(x,\theta)$$

1 exemple de fonctions de forme :

$$f(x,\theta) = R^3(x)\cos\left(\frac{\pi(x-x_1)}{(x_2-x_1)}\right)\cos(n\theta)$$

$$g(x,\theta) = R^3(x)\sin\left(\frac{\pi(x-x_1)}{(x_2-x_1)}\right)\sin(n\theta)$$

$$h(x,\theta) = R^3(x)\sin\left(\frac{\pi(x-x_1)}{(x_2-x_1)}\right)\cos(n\theta)$$



2

Formulation variationnelle (éq. Bifurcation) :

$$\forall \delta\bar{u}, \int_\Omega \bar{\bar{\nabla}}^T \delta\bar{u} : \boldsymbol{K} : \bar{\bar{\nabla}}\bar{X}\, d\Omega = 0$$

$$\Downarrow$$

Système d'équations algébriques homogènes en (u_0, v_0, w_0) :

$$\forall u_0, \forall v_0, \forall w_0, \int_\Omega \{\delta u_0(\dots)u_0 + \delta u_0(\dots)v_0 + \cdots$$
$$+ \delta v_0(\dots)u_0 + \cdots + \delta w_0(\dots)\, w_0\}\, d\Omega = 0$$

3

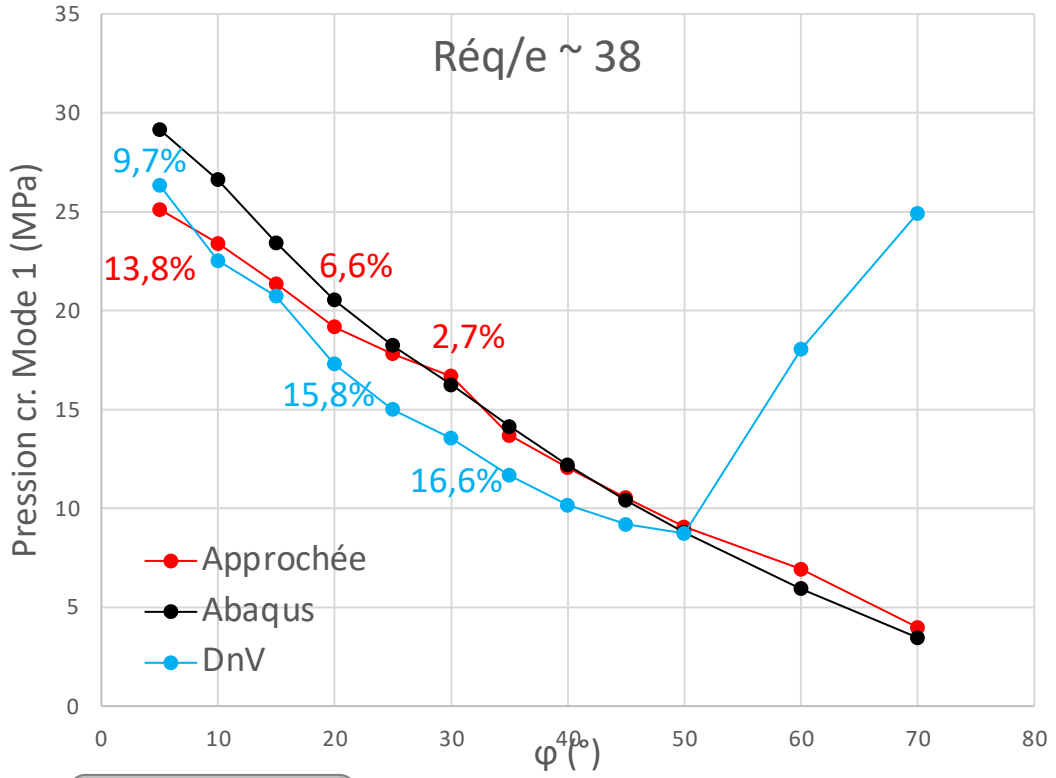
Déterminant nul :

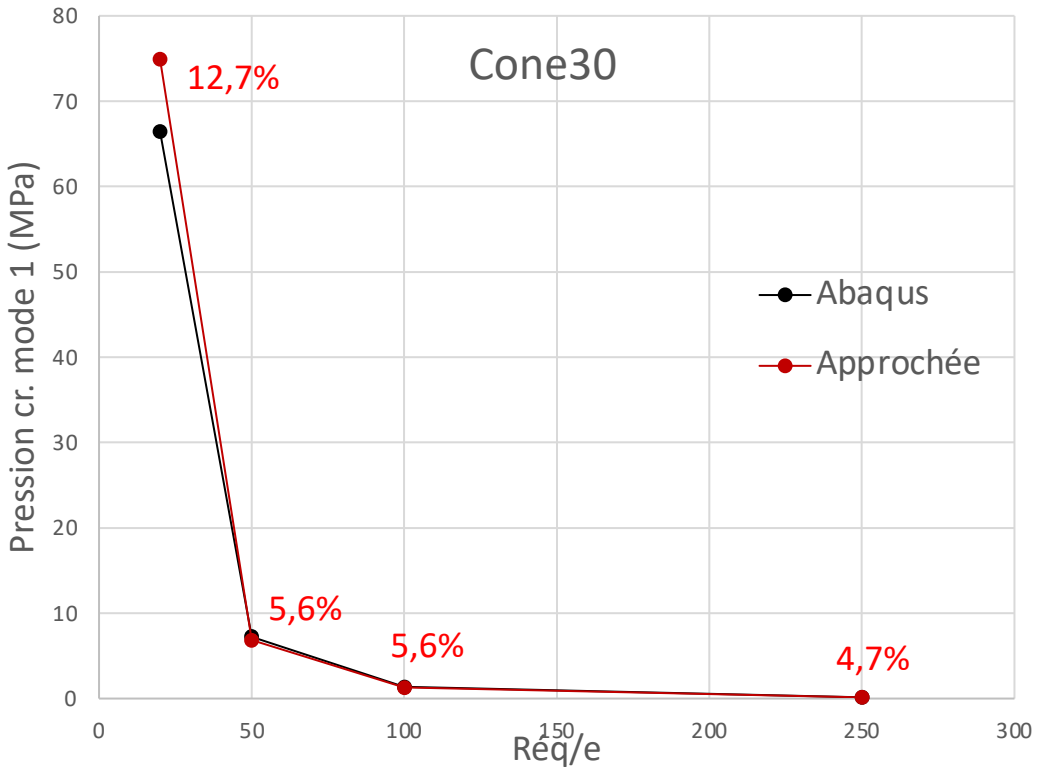
$$Det\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = 0$$

Obtention de la pression critique p_{cr}

Cône : Solution approchée – LBA

❑ Elasticité





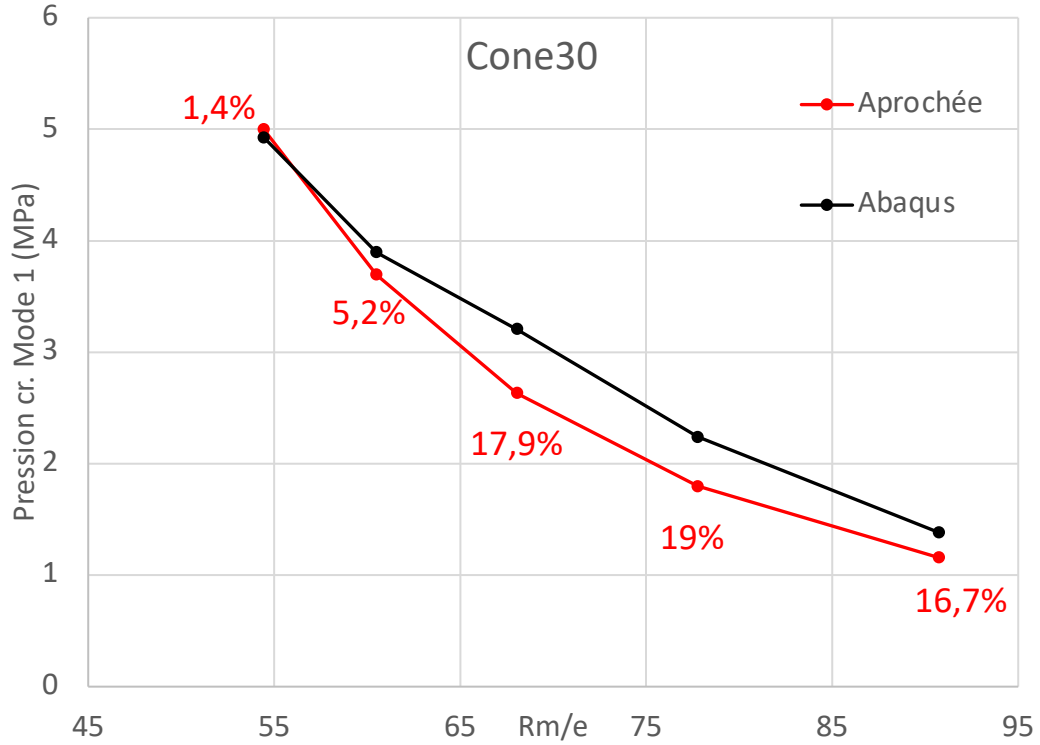
Remarques

- ✓ Résultats satisfaisants pour des angles moyens/grands $15° < \varphi < 50°$. ➡ Suffisant pour les transitions.
- ✓ Résultats satisfaisants pour les cônes d'épaisseurs moyenne et mince (R/e > 20).
- ✓ Fonctionne pour différents cônes courts ou longs (H/R arbitraire).

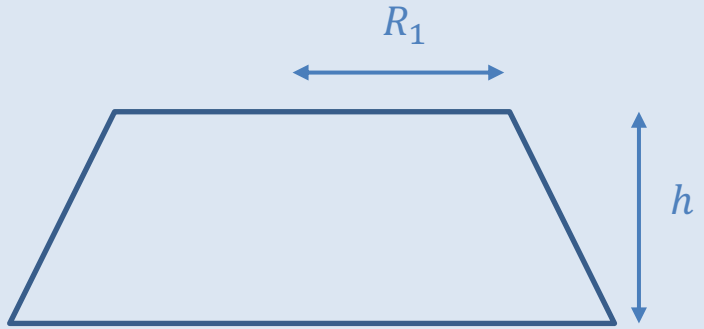
Cône : Solution approchée - GMNIA

❑ Plasticité

(Angle demi-sommet cône ESP : $\phi = 30° ou\ 45°$)



Domaine validité :



$$R_1 \geq h$$

$$\frac{R_{éq}}{e} < 60 \quad \text{(cône moyen -épais)}$$

Remarques

Validation résultats élastoplastique en cours

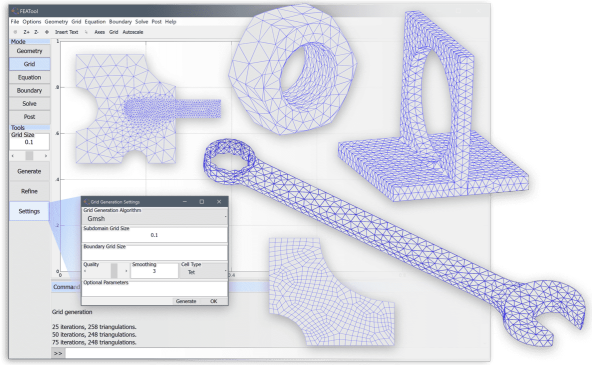
Code : Calcul numérique de flambement

Institut de Recherche Dupuy de Lôme

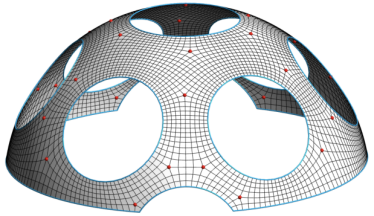
Code de calcul de flambement

Eléments Finis

- Elément coque à 8 nœuds (40 DDL)
- Intégration du générateur de maillage Gmsh (Python)



Quasi-structured quad meshing



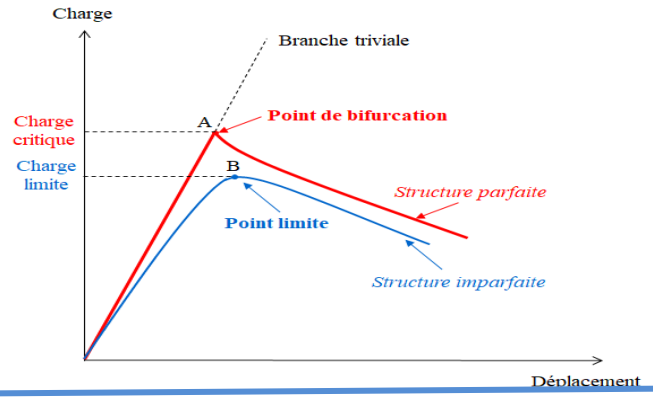
© GMSH

Applications

- Géométries standard + fonds (cylindres, sphères, cônes)
- ESP complets

Types d'analyse

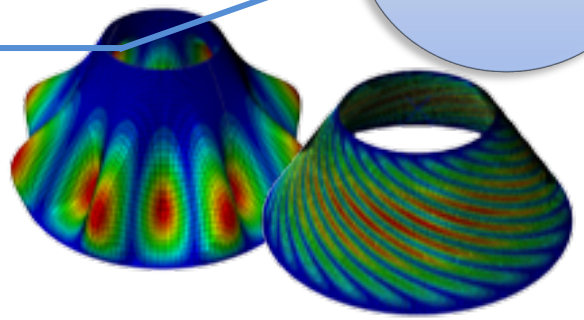
- LBA : Analyse de flambement linéarisée
- Flambement NL : Analyse quasi-statique basée sur une procédure incrémentale
- Imperfections (défauts de forme ou contraintes résiduelles)



Chargements

- Pression externe
- Compression axiale
- Torsion, …

Post-traitement

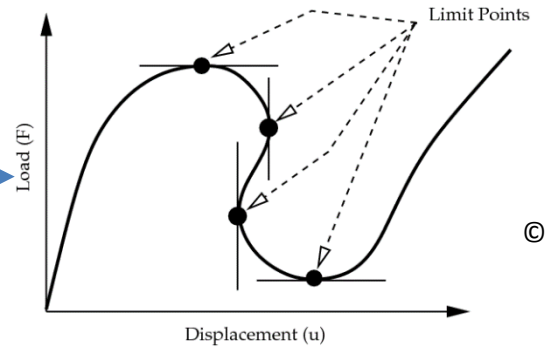


- **Charge critique** (bifurcation) + **charge limite admissible**
- Courbes charge/déplacement + déformées modales et post-critiques
- Comportement post-critique/**sensibilité aux défauts**

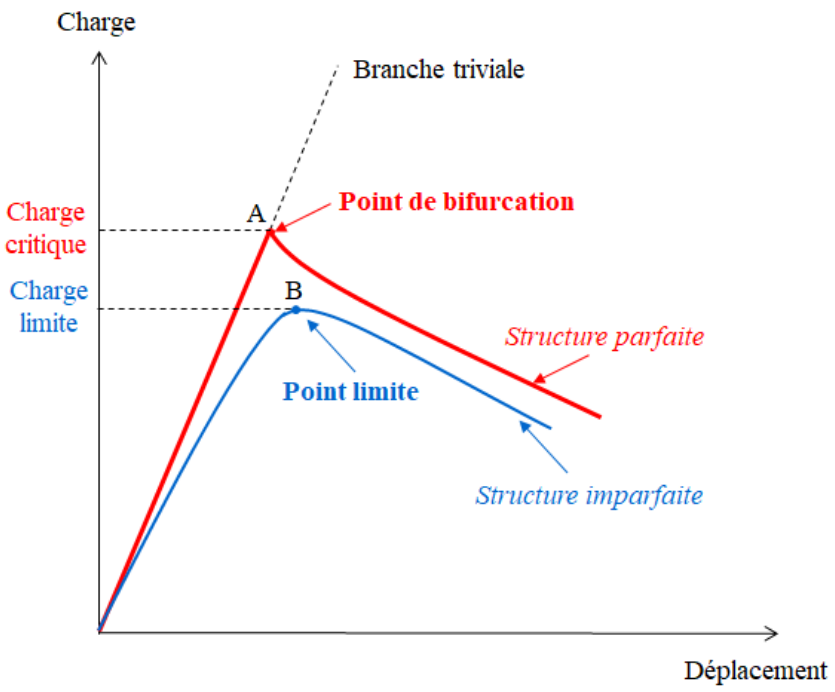
Code : Méthodes de branchement

Calcul incrémental : Méthode de Riks (pilotage en longueur d'arc)

- ✚ Permet de suivre une branche d'équilibre éventuellement non-monotone avec des points limites en charge et/ou en déplacement
- ▬ Ne permet pas d'identifier les points de bifurcation et de bifurquer sur les branches primaires ou secondaires ⇨ Obligation d'introduire des imperfections initiales dans le modèle



© WIKIVERSITY



Méthodes de branchement (branch-switching)

= méthodes générales applicables dans le cadre de grandes transformations avec un comportement matériel non-linéaire

⇨ méthodes découplées du modèle EF

Capables de **détecter et évaluer les points de bifurcation et points limites**, et de tracer les branches bifurquées **sans recourir à des imperfections initiales**

Permettent l'obtention du **squelette de l'ensemble des courbes d'équilibre de la structure parfaite**, sur lequel s'appuient les courbes d'équilibre de la structure avec défauts

Code : Vers un modèle simplifié

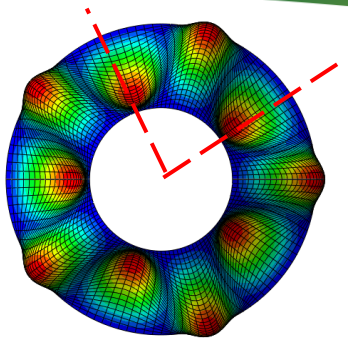
Temps de calcul ↘

Niveau 1

- **Structure complète**
- Code EF standard

⟹ Temps de calcul important

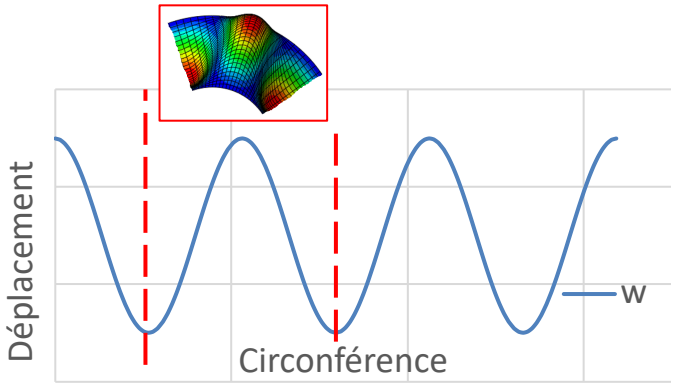
Cône sous pression externe



- Estimation analytique de la (des) longueur(s) d'onde du premier mode de flambement

⟹ **Portion de la structure contenant 1 période** (dans chaque direction de la coque)

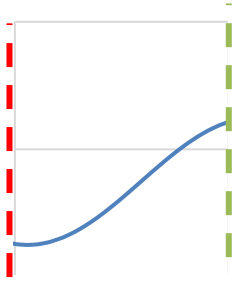
- CAL périodiques

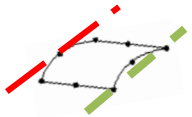


Niveau 2

- **1 seul EF** de taille appropriée (convergence de la discrétisation)
- Connaissance de la forme du mode de flambement
- CAL pseudo-périodiques (**théorie de Bloch**) : on impose un « **déphasage** » entre les deux côtés de l'élément relativement à sa taille et à la longueur d'onde du mode

Zoom





$$U_n = U^{\mathrm{Re}} \cos(2nkH) - U^{\mathrm{Im}} \sin(2nkH)$$

Institut de Recherche Dupuy de Lôme

Travaux à venir :

- Cylindre et sphère sous torsion
- Mode pré/post-traitement code de calcul

Merci pour votre attention